PC* 1 : Programme de colles de mathématiques n°5

Semaine du 04 *novembre* 2024 *au* 09 *novembre* 2024

EVN et Intégration

On posera (au moins) un exercice simple sur les intégrales généralisées et un exercice sur les espaces vectoriels normés.
Attention! le premier TD (1h) sur les intégrales sera mardi 7.

Questions de cours

Espaces vectoriels normés

- Propriétés intersection/union des ouverts d'un evn (dem).
- Propriétés intersection/union des fermés d'un evn (dem).
- Caractérisation séquentielle des fermés (dem).
- Caractérisation séquentielle de la limite (dem).
- Propriétés des images réciproques des ouverts/fermés par les applications $f : E \to F$ continues sur E.
- Continuité des applications linéaires en dimension finie.

Intégrales

- Théorème de comparaison (positif et intégrabilité). (Démonstration)
- Théorème d'intégration par parties. (Démonstration)
- Théorème de changement de variable. (Démonstration)
- L'absolue convergence implique la convergence. (Démonstration)
- Exemples de Riemann. (Démonstration)

Le programme **Espaces vectoriels normés**

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Normes	
Norme sur un espace vectoriel réel ou complexe. Espace vectoriel normé. Norme associée à un produit scalaire sur un espace préhilbertien réel.	Normes usuelles $\\| \\|_1$, $\\| \\|_2$ et $\\| \\|_\infty$ sur $\mathbb{K}^n$. Norme $\\| \\|_\infty$ sur un espace de fonctions bornées à valeurs dans $\mathbb{K}$. L'égalité $\sup(kA) = k\sup(A)$ pour A partie non vide de $\mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{R}^+$ peut être directement utilisée.
Distance associée à une norme. Boule ouverte, boule fermée, sphère. Partie convexe. Partie bornée, suite bornée, fonction bornée.	Convexité des boules.
b) Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé	
Convergence et divergence d'une suite. Unicité de la limite. Opérations sur les limites. Une suite convergente est bornée. Toute suite extraite d'une suite convergente est convergente.	Exemples dans des espaces de matrices, dans des espaces de fonctions.

c) Comparaison des normes

Contenus	Capacités & commentaires
Normes équivalentes.	Invariance du caractère borné, de la convergence d'une suite. Utilisation de suites pour montrer que deux normes ne sont pas équivalentes. La comparaison effective de deux normes n'est pas un objectif du programme. On se limite en pratique à des exemples élémentaires.

d) Topologie d'un espace vectoriel normé

Contenus	Capacités & commentaires
Point intérieur à une partie.	
Ouvert d'un espace normé.	Une boule ouverte est un ouvert.
Stabilité par réunion quelconque, par intersection finie.	
Fermé d'un espace normé.	Caractérisation séquentielle. Une boule fermée, une sphère, sont des fermés.
Stabilité par réunion finie, par intersection quelconque.	
Point adhérent à une partie, adhérence.	L'adhérence est l'ensemble des points adhérents. Caractérisation séquentielle. Toute autre propriété de l'adhérence est hors programme.
Partie dense.	
Invariance des notions topologiques par passage à une norme équivalente.	

e) Limite et continuité en un point

Contenus	Capacités & commentaires
Limite d'une fonction en un point adhérent à son domaine de définition.	Caractérisation séquentielle.
Opérations algébriques sur les limites, composition.	
Continuité en un point.	Caractérisation séquentielle.

f) Continuité sur une partie

Contenus	Capacités & commentaires
Opérations algébriques, composition.	
Image réciproque d'un ouvert, d'un fermé par une application continue.	Si f est une application continue de E dans $\mathbb{R}$ alors l'ensemble défini par $f(x) > 0$ est un ouvert et les ensembles définis par $f(x) = 0$ ou $f(x) \geqslant 0$ sont des fermés.
Fonction lipschitzienne. Toute fonction lipschitzienne est continue.	

g) Espaces vectoriels normés de dimension finie

Contenus	Capacités & commentaires
Équivalence des normes en dimension finie.	La démonstration est hors programme. La convergence d'une suite (ou l'existence de la limite d'une fonction) à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie équivaut à celle de chacune de ses coordonnées dans une base.
Théorème des bornes atteintes : toute fonction réelle continue sur une partie non vide fermée bornée d'un espace vectoriel normé de dimension finie est bornée et atteint ses bornes.	La démonstration est hors programme.
Continuité des applications linéaires, multilinéaires et polynomiales.	La notion de norme subordonnée est hors programme. Exemples du déterminant, du produit matriciel.

Intégration

Révisions de l'intégration sur un segment.

Les fonctions considérées sont définies sur un intervalle de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$, ensemble des nombres réels ou des nombres complexes.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Fonctions continues par morceaux	
Fonctions continues par morceaux sur un segment, sur un intervalle de $\mathbb{R}$.	
Intégrale sur un segment d'une fonction continue par morceaux.	Brève extension des propriétés de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment étudiées en première année. Aucune construction n'est exigible.
b) Intégrales généralisées sur un intervalle de la forme $[a,+\infty[$	
Pour f continue par morceaux sur $[a,+\infty[$, l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est dite convergente si $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ a une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$.	Notations $\int_a^{+\infty} f$, $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$. Intégrale convergente (resp. divergente) en $+\infty$.
Si f est continue par morceaux sur $[a,+\infty[$ et à valeurs positives, alors $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est majorée.	
Si f et g sont deux fonctions continues par morceaux sur $[a,+\infty[$ telles que $0 \leqslant f \leqslant g$, la convergence de $\int_a^{+\infty} g$ implique celle de $\int_a^{+\infty} f$.	
c) Intégrales généralisées sur un intervalle quelconque	
Adaptation du paragraphe précédent aux fonctions continues par morceaux définies sur un intervalle semi-ouvert ou ouvert de $\mathbb{R}$. Propriétés des intégrales généralisées : linéarité, positivité, croissance, relation de Chasles.	Notations $\int_a^b f$, $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$. Intégrale convergente (resp. divergente) en b, en a.
Intégration par parties sur un intervalle quelconque : $$\int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t = [fg]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$	La démonstration n'est pas exigible. L'existence des limites finies du produit fg aux bornes de l'intervalle assure que les intégrales de fg' et $f'g$ sont de même nature. ~~Pour les applications pratiques, on ne demande pas de rappeler les hypothèses de régularité.~~
Changement de variable : si $\varphi :]\alpha,\beta[\to]a,b[$ est une bijection strictement croissante de classe $\mathscr{C}^1$, et si f est continue sur $]a,b[$, alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_\alpha^\beta (f\circ\varphi)(u)\,\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$ sont de même nature, et égales en cas de convergence.	La démonstration n'est pas exigible. Adaptation au cas où φ est strictement décroissante. ~~On applique ce résultat sans justification dans les cas de changements de variable usuels.~~

d) Intégrales absolument convergentes et fonctions intégrables

Intégrale absolument convergente.
La convergence absolue implique la convergence.
Inégalité triangulaire.

L'étude des intégrales semi-convergentes n'est pas un objectif du programme.

Une fonction est dite intégrable sur un intervalle I si elle est continue par morceaux sur I et son intégrale sur I est absolument convergente.

Notations $\int_I f$, $\int_I f(t)\,\mathrm{d}t$.
Pour $I = [a,b[$, (respectivement $]a,b]$), fonction intégrable en b (resp. en a).

Espace vectoriel $L^1(I,\mathbb{K})$ des fonctions intégrables sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$.
Si f est continue, intégrable et positive sur I, et si $\int_I f(t)\,\mathrm{d}t = 0$, alors f est identiquement nulle.

Théorème de comparaison :
pour f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a,+\infty[$:

- si $f(t) \underset{t\to+\infty}{=} O\big(g(t)\big)$, alors l'intégrabilité de g en $+\infty$ implique celle de f.
- si $f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} g(t)$, alors l'intégrabilité de f en $+\infty$ est équivalente à celle de g.

Adaptation au cas d'un intervalle quelconque.

Le résultat s'applique en particulier si $f(t) \underset{t\to+\infty}{=} o(g(t))$.

Fonctions de référence :
pour $\alpha \in \mathbb{R}$,

- intégrales de Riemann : étude de l'intégrabilité de $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ en $+\infty$, en 0^+ ;
- étude de l'intégrabilité de $t \mapsto \mathrm{e}^{-\alpha t}$ en $+\infty$.

L'intégrabilité de $t \mapsto \ln t$ en 0 peut être directement utilisée.
Les résultats relatifs à l'intégrabilité de $x \mapsto \dfrac{1}{|x-a|^\alpha}$ en a peuvent être directement utilisés.
Plus généralement, les étudiants doivent savoir que la fonction $x \mapsto f(x)$ est intégrable en a^+ (resp. en b^-) si $t \mapsto f(a+t)$ (resp. $t \mapsto f(b-t)$) l'est en 0^+.